ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-685-695

УДК 517.935

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СБОРА ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА

© Л. И. Родина

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87
E-mail: LRodina67@mail.ru

Аннотация. Исследуются модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные управляемой системой с импульсными воздействиями, зависящей от случайных параметров. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, а в моменты времени kd, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega$, $k = 1, 2, \ldots,$ что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Рассматриваемый ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. В частности, можно предполагать, что мы производим добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания. Описана вероятностная модель конкуренции двух видов, для которой получены оценки средней временной выгоды от добычи ресурса, выполненные с вероятностью единица.

Ключевые слова: модель популяции, подверженной промыслу; средняя временная выгода; оптимальная эксплуатация

Введение

Задачи оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях начали вызывать интерес ученых, начиная с семидесятых годов прошлого века (см. [1–3]). В одной из первых работ [2], посвященной данной тематике, показано, что стохастическую рыбную популяцию можно эксплуатировать до достижения определенного уровня, не зависящего от текущего размера популяции. Вопросы оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными вероятностными моделями, в которых случайным воздействиям

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00346).

подвержены размер популяции, коэффициент рождаемости или цена продукции, также рассматриваются в работах [4–7] (более подробный обзор литературы приведен в [7]).

Данная работа является продолжением [8, 9]. Мы рассматриваем модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные управляемой системой с импульсными воздействиями, зависящей от случайных параметров. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$, а в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0,1]^n, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. В частности, можно предполагать, что мы рассматриваем добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или среди этих видов могут быть хищные. Отметим, что в данной работе в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент kd (исключением является последний параграф, где рассматривается случай $n = 1$).

Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку, если доли добываемого ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими (не меньше, чем значения $(u_1(k), \ldots, u_n(k)) = u(k) \in [0,1]^n$ в момент kd). В этом случае определенная часть ресурса сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора и доля извлеченного ресурса будет равна $\ell(k) = (\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)) \in [0,1]^n$, где

$$\ell_i(k) = \begin{cases} \omega_i(k), & \text{если } \ \omega_i(k) < u_i(k), \\ u_i(k), & \text{если } \ \omega_i(k) \geqslant u_i(k) \end{cases}$$

для любого $i = 1, \ldots, n.$ Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) = \big(1 - \ell_i(k)\big) \cdot x_i(kd - 0), \end{gathered} \tag{0.1}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа, функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \Sigma \doteq \{\sigma : \sigma \doteq (\omega(1), \ldots, \omega(k), \ldots)\}, \quad \omega(k) \in \Omega; \\ U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \ldots, u(k), \ldots)\}, \quad u(k) \in [0,1]^n. \end{gathered}$$

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots,$ зависящее от долей ресурса $\ell(1), \ldots, \ell(k-1),$ собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0),$ $Y(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i(k)\ell_i(k)$ — общее количество собранного ресурса. Для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ введем в рассмотрение функцию

$$H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j)\,, \tag{0.2}$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big)$ и, если выполнено равенство $H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) = H^*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big),$ то определим предел

$$H\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j)\,.$$

В данной работе получены оценки средней временной выгоды на примере вероятностной модели конкуренции двух видов. Мы описываем способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления и приводим оценки функции (0.2), выполненные с вероятностью единица.

1. Оценки средней временной выгоды в случае $n = 1$

Для оценки функции $H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big)$ сформулируем результаты, полученные в работе [9] для случая $n = 1$. Сначала приведем краткое описание вероятностной модели, заданной управляемой системой со случайными параметрами (0.1).

Предполагаем, что задано вероятностное пространство $(\Omega,\ \widetilde{\mathfrak{A}},\ \widetilde{\mu}),$ где $\Omega \subseteq [0,1],$ $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств $\Omega,$ на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}.$ Рассмотрим множество последовательностей $\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega(1), \ldots, \omega(k), \ldots)\},$ где $\omega(k) \in \Omega.$ Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \big\{\sigma \in \Sigma : \omega(1) \in A(1), \ldots, \omega(k) \in A(k)\big\}, \quad \text{где } \ A(j) \in \widetilde{\mathfrak{A}},\ j = 1, 2, \ldots, k$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(E_k) = \widetilde{\mu}(A(1)) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(A(k)).$ Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [10]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера $\mu,$ которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}.$ Таким же образом строится вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ в случае, когда $\Omega \subseteq [0,1]^n.$

Определим $\varphi(t, x)$ как решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x),$ удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x,$ где $t \geqslant 0,$ $x \geqslant 0.$ Если $f(K) = 0,$ то уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет решение $\varphi(t) \equiv K;$ если $f'(K) < 0,$ то данное решение асимптотически устойчиво (см. [11, с. 30]). Напомним, что областью асимптотической устойчивости (областью притяжения) решения $\varphi(t) \equiv K$ уравнения $\dot{x} = f(x)$ является множество всех точек $x \in \mathbb{R},$ обладающих свойством $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t, x) = K.$

Обозначим через $X(k)$ количество ресурса до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots,$ тогда

$$H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X(j)\ell(j).$$

Рассмотрим функцию

$$\ell(\omega, u) = \begin{cases} \omega, & \text{если } \ \omega < u, \\ u, & \text{если } \ \omega \geqslant u, \end{cases}$$

которая является случайной величиной на множестве Ω. Математическое ожидание случайной величины $\ell(\omega, u)$ будем обозначать $M\ell$.

Теорема 1.1. *Пусть* $\mu(0) < 1$. *Предположим, что уравнение* $\dot{x} = f(x)$ *имеет асимптотически устойчивое решение* $\varphi(t) \equiv K$, *областью притяжения которого является интервал* (K_1, K_2), *где* $0 \leqslant K_1 < K < K_2 \leqslant +\infty$. *Тогда для любых* $x \in (K_1, K)$ *и* $x(0) \in (K_1, K_2)$ *существует управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что неравенства*

$$\varphi(d, x)M\ell \leqslant H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \leqslant KM\ell \tag{1.1}$$

выполнены для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

2. Оценка средней временной выгоды для вероятностной модели конкуренции двух видов

Основным объектом исследования в данной работе является модель, представляющая собой конкуренцию двух видов, численности которых равны x_1, x_2. Каждый из видов размножается в соответствии с логистическим законом, а при встрече численность как одного, так и другого вида уменьшается:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 - ax_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_2^2 - bx_1x_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

В моменты времени kd производится добыча ресурса таким образом, что извлекается некоторая доля $\omega_i(k)$ от количества ресурса каждого из видов до сбора $x_i(kd-0)$, $i = 1, 2$, тогда количество оставшегося ресурса после сбора равно

$$x_i(kd) = \big(1 - \omega_i(k)\big) \cdot x_i(kd-0), \quad i = 1, 2; \;\; k = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

где $(\omega_1(k), \omega_2(k)) = \omega(k) \in \Omega \subseteq [0, 1]^2$.

Предполагаем, что $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$; тогда система (2.1) имеет четыре стационарных состояния: $(0, 0)$ — неустойчивый узел, $(0, 1)$ и $(1, 0)$ — седло и

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \Big(\frac{1-a}{1-ab}, \frac{1-b}{1-ab}\Big)$$

— устойчивый узел. Из условий $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$ следует, что $ab < 1$, то есть выполнено условие сосуществования двух конкурирующих видов (см. [11, с. 147]).

Пусть $A = \dfrac{1-ab}{1-a}$ и функция $\varphi(t,y)$ является решением уравнения $\dot{y} = y - Ay^2$, удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0,y) = y$, где $t \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Положим

$$\widetilde{\omega} \doteq \min(\omega_1,\omega_2), \quad \widetilde{\ell}(\omega,u) \doteq \ell(\widetilde{\omega},u) = \begin{cases} \widetilde{\omega}, & \text{если } \widetilde{\omega} < u, \\ u, & \text{если } \widetilde{\omega} \geqslant u. \end{cases}$$

Определим $\widetilde{\mathbb{R}}^2_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mu(\widetilde{\omega} = 0) < 1$. *Тогда для любых* $y \in (0, 1/A)$ *и* $x(0) \in \widetilde{\mathbb{R}}^2_+$ *существует управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что неравенства*

$$\frac{2-a-b}{1-a}\,\varphi(d,y)M\widetilde{\ell} \leqslant H_*\big(\sigma,\bar{u},x(0)\big) \leqslant \frac{2-a-b}{1-ab}\,M\widetilde{\ell} \tag{2.3}$$

выполнены для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Доказательство. Напомним, что через $X_i(k)$ мы обозначаем количество ресурса i-го вида до сбора, через $x_i(k)$ будем обозначать соответственно количество ресурса i-го вида после сбора в момент времени kd, тогда $x_i(k) = (1-\ell_i(k))X_i(k)$, $i = 1,2$, $k = 1,2,\ldots$. Рассмотрим луч γ на плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящий через начало координат и особую точку x^*; его можно задать уравнением $x_2 = px_1$, где $p = \dfrac{1-b}{1-a}$, $x_1 > 0$. Пусть точка $\widetilde{x}$ является пересечением луча γ и прямой, проходящей через особые точки $(0,1)$ и $(1,0)$; тогда

$$\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \Big(\frac{1}{1+p}, \frac{p}{1+p}\Big).$$

Представим множество $\widetilde{\mathbb{R}}^2_+$ в виде объединения четырех непересекающихся множеств:

$$\widetilde{\mathbb{R}}^2_+ = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup \gamma, \text{ где } D_0 = D_{01} \cup D_{02},$$
$$D_{01} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in (0,\widetilde{x}_2), x_2 < px_1\}, \ D_{02} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0,\widetilde{x}_1), x_2 > px_1\},$$
$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant \widetilde{x}_2, x_2 < px_1\}, \quad D_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant \widetilde{x}_1, x_2 > px_1\}.$$

Строим управление в зависимости от того, в каком из указанных множеств находится начальная точка $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) \in \widetilde{\mathbb{R}}^2_+$. Пусть сначала $x(0) \in D_0$. Несложно показать, что если $a \in (0,1)$, $b \in (0,1)$, то $\widetilde{x}_1 < x_1^*$, $\widetilde{x}_2 < x_2^*$; поэтому существует $O_\varepsilon(x^*)$ — окрестность точки x^* радиусом $\varepsilon > 0$, не пересекающая множество D_0. Полагаем $u(k) = (0,0)$ при $k < k_0$, где $k_0 = k_0(x(0))$ — наименьшее из натуральных чисел, при которых точка $x(k) = (x_1(k), x_2(k))$ не принадлежит множеству D_0. Такое k_0 существует, так как с течением времени траектория любой начальной точки $x(0) \in \widetilde{\mathbb{R}}^2_+$ попадает в окрестность $O_\varepsilon(x^*)$. Это означает, что мы не производим отлов ни одного из видов до тех пор, пока их количество не увеличится достаточным образом. При таком управлении $x(k_0) \in D_1$ либо $x(k_0) \in D_2$ (в зависимости от расположения начальной точки $x(0)$, которая может находиться в области D_{01} либо в D_{02}).

Рассмотрим случай, когда $x(k_0) \in D_1$; здесь мы строим управление таким образом, чтобы ловить только x_1 — первый из двух видов, составляющих популяцию. То есть мы полагаем, что $u(k)=(1,0)$ (тогда $\ell(k)=(\omega_1(k),0)$) до наименьшего момента времени $k_1 d$, $k_1>k_0$, при котором точка $x(k_1)$ окажется выше луча γ. При пересечении траекторией системы (2.1), (2.2) луча γ изъятие ресурса прекращаем, чтобы фазовая точка оказалась на данном луче. В работе [9] показано, что такой момент времени k_1 существует с вероятностью единица. Понятно, что если $x(k_0) \in D_2$, то управление строится аналогичным образом, чтобы производить отлов из популяции только особей второго вида x_2.

Пусть теперь $x(k_1) \in \gamma$, то есть $x_2(k_1)=px_1(k_1)$. В этом случае траектория решения системы (2.1) принадлежит лучу γ и, если не производить извлечение ресурса, то данная траектория будет приближаться к особой точке x^*; следовательно, $X_2(k_1)=pX_1(k_1)$. Покажем, что движение точки x_1 по этой траектории удовлетворяет уравнению $\dot{x}_1=x_1-Ax_1^2$. Действительно, если $x_2=px_1$, то

$$\dot{x}_1=x_1-x_1^2-apx_1^2=x_1-(1+ap)x_1^2=x_1-Ax_1^2.$$

Аналогично, x_2 удовлетворяет уравнению $\dot{x}_2=x_2-Bx_2^2$, где $B=\dfrac{1-ab}{1-b}$.

Пусть $x_1(k_1) \in [y,1/A]$, тогда $\varphi(d,x_1(k_1)) \geqslant \varphi(d,y)$. Для всех $k \geqslant k_1+1$ определим

$$\widetilde{\omega}(k)=\min(\omega_1(k),\omega_2(k)),$$
$$u(k)=u_1(k)=u_2(k)=1-\frac{y}{\varphi(d,y)},$$
$$\widetilde{\ell}(k)=\ell(\widetilde{\omega}(k),u(k)).$$

Тогда $x(k_1+1)=\big(1-\widetilde{\ell}(k_1+1)\big)X(k_1) \in \gamma$ и, следовательно, $x(k) \in \gamma$ для всех $k \geqslant k_1+1$. Далее, из неравенства $\widetilde{\ell}(k) \leqslant u(k)$, $k \geqslant k_1+1$, получаем

$$x_1(k_1+1)=\big(1-\widetilde{\ell}(k_1+1)\big)X_1(k_1) \geqslant \big(1-u(k_1+1)\big)X_1(k_1)= \\ =\frac{y}{\varphi(d,y)}X_1(k_1) \geqslant \frac{y}{\varphi(d,x_1(k_1))}X_1(k_1)=y,$$

поэтому $x_2(k_1+1) \geqslant py$. Так же можно показать, что $x_1(k) \geqslant y$ и $x_2(k) \geqslant py$ для всех $k \geqslant k_1+1$. Если $x_1(k_1) \in (0,y) \cup (1/A,+\infty)$, то управления $u(k)$ строим как в случае $n=1$ (см. доказательство теоремы 1.1 в работе [9]), добавляя условие $u_1(k)=u_2(k)$, $k \geqslant k_1+1$.

Отметим, что уравнения $\dot{x}_1=x_1-Ax_1^2$ и $\dot{x}_2=x_2-Bx_2^2$ имеют асимптотически устойчивые решения $\varphi_1(t) \equiv 1/A$ и $\varphi_2(t) \equiv 1/B$ соответственно, областью притяжения каждого из которых являются интервалы $(0,+\infty)$. Поэтому для дальнейшего доказательства можно применить теорему 1.1. Пусть

$$H_{i*}\big(\sigma,\bar{u},x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}X_i(j)\ell_i(j)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=k_1+1}^{k}X_i(j)\widetilde{\ell}(j), \quad i=1,2,$$

тогда $H_{i*}\big(\sigma,\bar u,x(0)\big)=H_{i*}\big(\sigma,\bar u,x(k_1+1)\big)$, где $x(k_1+1)\in\gamma$ и

$$H_*\big(\sigma,\bar u,x(0)\big)=H_{1*}\big(\sigma,\bar u,x(k_1+1)\big)+H_{2*}\big(\sigma,\bar u,x(k_1+1)\big).$$

Из (1.1) следует, что для любого $y\in(0,1/A)$ при почти всех $\sigma\in\Sigma$ выполнены неравенства

$$\varphi(d,y)M\widetilde{\ell}\leqslant H_{1*}\big(\sigma,\bar u,x(k_1+1)\big)\leqslant\frac{M\widetilde{\ell}}{A},$$
$$p\varphi(d,y)M\widetilde{\ell}\leqslant H_{2*}\big(\sigma,\bar u,x(k_1+1)\big)\leqslant\frac{M\widetilde{\ell}}{B},$$

при сложении которых получаем (2.3).

П р и м е р 2.1. Найдем оценки средней временной выгоды для системы с импульсным воздействием (2.1), (2.2), в которой $a=0,5$, $b=0,4$; следовательно, $A=1,6$. Пусть $d=\ln 10$ и $\omega=(\omega_1,\omega_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $[0,1]\times[0,1]$.

Выпишем $\varphi(t,y)=\dfrac{e^t y}{Ay(e^t-1)+1}$ — решение уравнения $\dot y=y-Ay^2$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,y)=y$; тогда

$$u=1-\frac{y}{\varphi(d,y)}=(1-e^{-d})(1-Ay)=0,9(1-1,6y).$$

Найдем функцию распределения для $\widetilde{\omega}=\min(\omega_1,\omega_2)$ при $t\in[0,1]:$

$$G_{\widetilde{\omega}}(t)=1-\mu(\widetilde{\omega}>t)=1-\mu(\omega_1>t,\omega_2>t)=1-(1-t)^2=2t-t^2,$$

тогда плотность этого распределения равна $g_{\widetilde{\omega}}(t)=2-2t$ при $t\in[0,1]$ и $g_{\widetilde{\omega}}(t)=0$ при остальных значениях t. Случайная величина $\widetilde{\ell}=\ell(\widetilde{\omega},u)$ — смешанного типа, поэтому ее математическое ожидание находится следующим образом:

$$M\widetilde{\ell}=\int_0^u t g_{\widetilde{\omega}}(t)dt+u\big(1-G_{\widetilde{\omega}}(u)\big)=u-u^2+\frac{u^3}{3}.$$

После стандартных вычислений получаем, что функция $\varphi(d,y)M\widetilde{\ell}$ достигает наибольшего значения при $y\approx 0,24$. Следовательно, в силу теоремы 2.1 значение средней временной выгоды для почти всех $\sigma\in\Sigma$ удовлетворяет неравенствам

$$0,35\leqslant H_*\big(\sigma,\bar u,x(0)\big)\leqslant 0,41. \tag{2.4}$$

Управление $\bar u\in U$, при котором выполнено последнее неравенство, строим так же, как при доказательстве теоремы 2.1.

Отметим, что задача оценивания функции $H_*\big(\sigma,\bar u,x(0)\big)$ сводится к одномерному случаю, для которого можно получить более точную оценку, чем (2.4). Соответствующие результаты приведены в следующем параграфе.

3. О существовании предела средней временной выгоды в случае $n = 1$

Приведем оценки функции $H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big)$ и условия, при которых с вероятностью единица существует положительный предел $H\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big)$.

Напомним, что через $\varphi(t, x)$ мы обозначаем решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $\sigma_m \doteq (\omega(1), \ldots, \omega(m))$ и зададим рекуррентным образом случайные величины $A_m = A_m(\sigma_m, x)$, $B_m = B_m(\sigma_m, x)$:

$$A_1 = \varphi(d, x), \;\; A_{k+1} = \varphi\big(d, (1 - \ell_k)A_k\big);$$
$$B_1 = K, \;\; B_{k+1} = \varphi\big(d, (1 - \ell_k)B_k\big), \quad k = 1, \ldots, m - 1.$$

Здесь

$$\ell_k = \ell_k(\sigma_k, x) = \begin{cases} \omega(k), & \text{если } \ \omega(k) < u(k), \\ u(k), & \text{если } \ \omega(k) \geqslant u(k), \end{cases} \tag{3.1}$$

$u(k) = 1 - \dfrac{x}{A_k(\sigma_k, x)}$; $\ell_m = \ell_m(\sigma_m, x)$ также определим равенством (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть* $\mu(0) < 1$. *Предположим, что уравнение* $\dot{x} = f(x)$ *имеет асимптотически устойчивое решение* $\varphi(t) \equiv K$, *областью притяжения которого является интервал* (K_1, K_2), *где* $0 \leqslant K_1 < K < K_2 \leqslant +\infty$. *Тогда для любых* $m \in \mathbb{N}$, $x \in (K_1, K)$ *и* $x(0) \in (K_1, K_2)$ *существует управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что неравенства*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M(A_k\ell_k) \leqslant H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \leqslant H^*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M(B_k\ell_k).$$

выполнены для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.1 *и* $f'(x) < 0$ *при* $x \in (L_1, L_2)$, *где* $K_1 < L_1 < K < L_2$. *Тогда для любых* $x \in (L_1, K)$ *и* $x(0) \in (K_1, K_2)$ *при некотором управлении* $\bar{u} \in U$ *для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *существует положительный предел*

$$H\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big) = \lim_{k\to\infty} M(A_k\ell_k) = \lim_{k\to\infty} M(B_k\ell_k),$$

не зависящий от начального значения $x(0) \in (K_1, K_2)$.

Доказательство этих результатов в более общем случае, когда длины интервалов между моментами импульсов $\tau(k)$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, приведено в работе [12].

Заключение

Таким образом, для вероятностной модели конкуренции двух видов построено управление $\bar{u} \in U$, которое обеспечивает сохранность обоих видов x_1 и x_2 и оценку средней временной выгоды (2.3). Можно предложить другие способы построения $\bar{u} \in U$, а потом из данных управлений выбрать то, при котором оценка снизу функции $H_*\big(\sigma, \bar{u}, x(0)\big)$ максимальная. Заметим также, что описанным способом можно построить управление $\bar{u} \in U$ для различных систем, имеющих одно стационарное асимптотически устойчивое состояние x^* с положительными координатами $x_1^* > 0, \ldots, x_n^* > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glait A.* Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth // Mathematical Biosciences. 1978. Vol. 41. P. 111-123.

2. *Reed W.J.* Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management. 1979. Vol. 6. P. 350-363.

3. *Lewis T.R.* Exploitation of a renewable resourse under uncertaintly // Canadian Journal of Economics. 1981. Vol. 14. P. 422-439.

4. *Ryan D., Hanson F.B.* Optimal harvesting of a logistic population with stochastic jumps // J. Math. Biol. 1986. Vol. 24. P. 259-277.

5. *Kapaun U., Quaas M.F.* Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // Economics Working Paper. 2012. Vol. 9. P. 1-40.

6. *Hansen L.G., Jensen F.* Regulating fisheries under uncertainty // Resourse and Energy Economics. 2017. Vol. 50. P. 164-177.

7. *Jensen F., Frost H., Abildtrup J.* Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. Vol. 21. P. 167-178.

8. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48-58.

9. *Родина Л.И., Тютеев И.И.* Об оценке средней временной выгоды в вероятностных эколого-экономических моделях // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. Вып. 3. С. 257-267.

10. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980. 574 с.

11. *Ризниченко Г.Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. Ч. 1. 232 с.

12. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 213-221.

Поступила в редакцию 25 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 28 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Родина Людмила Ивановна, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, e-mail: LRodina67@mail.ru

Для цитирования: *Родина Л.И.* Об одной стохастической модели сбора возобновляемого ресурса // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 685–695. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-685-695

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-685-695

ABOUT ONE STOCHASTIC HARVESTING MODEL OF A RENEWED RESOURSE

L. I. Rodina

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
87 Gorky St., Vladimir 600000, Russian Federation
E-mail: LRodina67@mail.ru

Abstract. We investigate the models of dynamics of the harvested population, given by the control systems with impulse influences depending on random parameters. We assume that in the absence of harvesting population development is described by system of the differential equations $\dot{x} = f(x)$ and in time moments kd, $d > 0$ from population are taken some random share of a resource $\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega$, $k = 1, 2, \ldots,$ that leads to sharp (impulse) reduction of its quantity. Considered resource $x \in \mathbb{R}^n_+$ is non-uniform, that is or it consists of separate kinds $x_1, \ldots, x_n$, or it is divided on n age groups. In particular, it is possible to assume that we make harvesting of n various kinds of fishes between which there are competition relations for food or dwelling places. We describe the probability model of a competition of two kinds for which we receive the estimations of average time benefit from the resource extraction, fulfilled with probability one.

Keywords: model of the population subject to a craft; average time profit; optimal exploitation

REFERENCES

1. Glait A. Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth. *Mathematical Biosciences*, 1978, vol. 41, pp. 111-123.

2. Reed W.J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models. *Journal of Environmental Economics and Management*, 1979, vol. 6, pp. 350-363.

3. Lewis T.R. Exploitation of a renewable resourse under uncertaintly. *Canadian Journal of Economics*, 1981, vol. 14, pp. 422-439.

4. Ryan D., Hanson F.B. Optimal harvesting of a logistic population with stochastic jumps. *J. Math. Biol.*, 1986, vol. 24, pp. 259-277.

5. Kapaun U., Quaas M.F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? *Economics Working Paper*, 2012, vol. 9, pp. 1-40.

6. Hansen L.G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty. *Resourse and Energy Economics*, 2017, vol. 50, pp. 164-177.

7. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information. *Marine Policy*, 2017, vol. 21, pp. 167-178.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-00346).

8. Rodina L.I. Optimizatsiya sredney vremennoy vygody dlya veroyatnostnoy modeli populyatsii, podverzhennoy promyslu [Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 48-58. (In Russian).

9. Rodina L.I., Tyuteev I.I. Ob otsenke sredney vremennoy vygody v veroyatnostnykh ekologo-ekonomicheskikh modelyakh [On Estimation of an Average Time Profit in Probabilistic Environmental and Economic Models]. *Modelirovaniye i analiz informatsionnykh system – Modeling and Analysis of Information Systems*, 2018, vol. 25, no. 3, pp. 257-267. (In Russian).

10. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 574 p. (In Russian).

11. Riznichenko G.Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Ch. 1.* [Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1]. Izhevsk, Scientific-Publishing Centre "Regular and Chaotic Dynamics", 2002, 232 p. (In Russian).

12. Rodina L.I. Svoystva sredney vremennoy vygody v stokhasticheskikh modelyakh sbora vozobnovlyayemogo resursa [Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2018. vol. 28, no. 2, pp. 213-221. (In Russian).

Received 25 April 2018
Reviewed 28 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Rodina Lyudmila Ivanovna, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, e-mail: LRodina67@mail.ru

For citation: Rodina L.I. Ob odnoj stohasticheskoj modeli sbora vozobnovljaemogo resursa [About one stochastic harvesting model of a renewed resourse]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 685–695. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-685-695 (In Russian, Abstr. in Engl.).